

## The optimal city size based on public service

Hirohito Takeuchi\*(Aichi University)

Hiroyoshi Kozu(Aichi University)

koyu kato(The University of Fukuchiyama)

Research on the optimal size of cities has been mainly done in the field of urban economics.

There is a utility maximization theory and the like using microeconomic theory, etc. There is cost - benefit analysis from the viewpoint of management engineering regarding the optimum population size.

In this paper, we focus on the management of the city and construct a model that considers the utility maximization of the city concerning the tax revenue on the city or the number of establishments.

Then, empirical analysis is carried out for each.

## 公共サービスにもとづく都市の最適規模

竹内 啓仁\* (愛知大学)

神頭 広好 (愛知大学)

加藤 好雄 (福知山公立大学)

都市の最適規模についての研究は、主に都市経済学の分野でなされてきた。ミクロ経済理論を用いたものに効用最大化理論などがあり、最適な人口規模については経営工学的な観点からコストーベネフィット分析がある。

この論文では、都市の経営に照準をあてて、当該都市のまたは事業所数に対する税金について都市の効用最大化を考慮したモデルを構築し、それぞれについて実証分析を実施する。

# 公共サービスにもとづく都市の最適規模

竹内 啓仁\* (愛知大学)

神頭 広好 (愛知大学)

加藤 好雄 (福知山公立大学)

## 1. はじめに

都市の最適規模についての研究は、主に公共経済学、都市経済学の分野でなされてきた。ミクロ経済理論を用いたものに効用最大化理論、Stiglitz(1977)、Atkinson and Stiglitz (1980)、Rubinfeld (1987)にもとづく地方公共財の理論<sup>1</sup>、さらには都市の需給バランスを考慮した坂下(1994)などがある。公共経済学の一般的テキストとしては、Stiglitz,(2000)が有名である。一方、最適な人口規模については、経営工学的な観点からコストベネフィット分析などがある。

ここでは、都市の経営に照準をあてて、税収のもとでの都市の効用(または活気)最大化を考慮したモデルを構築する。ただし、税金は消費者および企業にとっては支出であり、自治体にとっては税収の大きさが消費者および企業に与える政策効果として捉える。

## 2. 都市経営モデル

ここでは、税収の制約の下で、都市の効用を最大化させるための基礎的な空間的システムを明らかにする。公共サービスが人と企業の立地を通じて都市の効用を最大化させるモデルである。つぎの諸仮定が設定される。

- (1)都市の効用は、人口規模と企業数としての企業規模から成る。
- (2)都市の効用関数には、人口規模および企業規模において都市の固有的特性としての交通条件、地理的形状および土地利用などが外部経済効果および外部不経済効果として人口および企業の増減に関わっている。
- (3)住民と企業の総税収のもとで都市の効用の最大化がもたらされる。また、それぞれに課される税金は人口および企業を呼び込むための政策に支出される。

都市の効用関数は、

$$v = u(p, f) \quad (1)$$

で表される。 $v$ は都市の総効用を示す。

つぎに、税収<sup>2</sup>の制約式は、

$$g = pt_p + ft_f \quad (2)$$

で表される。ただし、 $t_p$ は住民当り税収(所得税および住民税等による税収)、 $t_f$ は企業当り税収(所得税および法人税等による税収)をそれぞれ示す。

都市の効用の最大化の条件を求めるためにラグランジュ関数で表すと、

---

<sup>1</sup> この理論の評論としては、宇沢弘文・小川善弘(1989年、pp.2-10)がある。

<sup>2</sup> ここでは、自治体側からの税収は企業および住民側からの課税を意味する。

$$S = u(p, f) + \lambda(g - pt_p - ft_f) \quad (3)$$

人口による効用最大化の条件は(3)式から、

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial u}{\partial p} - \lambda t_p = 0 \quad (4)$$

である。

企業による効用最大化の条件は(3)式から、

$$\frac{\partial S}{\partial f} = \frac{\partial u}{\partial f} - \lambda t_f = 0 \quad (5)$$

である。さらに効用が最大化される条件は、(4)式および(5)式から $\lambda$ を消去して整理すると、

$$\frac{\partial u}{\partial p} / \frac{\partial u}{\partial f} = t_p / t_f \quad (6)$$

が得られる。

ここで、特定化された効用関数は、

$$u(p, f) = \alpha p - \beta p^2 + \gamma f - \varepsilon f^2 \quad (7)$$

で表される。ただし、 $\alpha$ は人口増加による外部経済効果( $0 < \alpha$ )は人口増加による外部不経済効果( $0 < \beta$ )、 $\gamma$ は企業の外部経済効果( $0 < \gamma$ )、 $\varepsilon$ は企業の外部不経済効果( $0 < \varepsilon$ )をそれぞれ示す。

人口規模に関する限界効用は(7)式から、

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \alpha - 2\beta p \quad (8)$$

である。さらに効用が最大化される人口規模(最適人口規模)は、

$$p^* = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (9)$$

である。

企業規模に関する限界効用は(7)式から、

$$\frac{\partial u}{\partial f} = \gamma - 2\varepsilon f \quad (10)$$

である。さらに効用が最大化される企業規模(最適企業規模)は、

$$f^* = \frac{\gamma}{2\varepsilon} \quad (11)$$

である。

ところで、人口規模と企業規模のもとの効用最大化の条件は(6)式から、

$$\frac{\alpha - 2\beta p}{\gamma - 2\varepsilon f} = \frac{t_p}{t_f} \quad (12)$$

である。(12)式から、

$$p = \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{(2\varepsilon f - \gamma)t_p}{2\beta t_f} \quad (13)$$

が導かれる。(13)式から、企業当りの税収としての税金が住民当りの税収としての税金よりもかなり高い場合は、 $t_p / t_f \rightarrow 0$ であることから、

$$p = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (14)$$

で表される。(14)式は企業当りの税金が高いと、企業規模は落ち着き、最適人口規模が達成されることを示唆している。

さらに、企業規模の変化に対する人口規模の変化については、

$$\frac{\partial p}{\partial f} = \frac{\varepsilon t_p}{\beta t_f} = \frac{\varepsilon / t_f}{\beta / t_p} \quad (15)$$

で表される。(15)式から企業の数が増えると、多かれ少なかれ人口は増加することを示している。その増加の程度はどちらかの税金が外部不経済効果をいかに減少させるかにかかっている。

一方、人口が変化に対する企業の変化については(15)式とは逆に

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\beta t_f}{\varepsilon t_p} = \frac{\beta / t_p}{\varepsilon / t_f} \quad (16)$$

で表される。(16)式については例えば、ショッピングセンターの立地に見られる傾向であり、税金で企業の不経済効果が減じられるほど、ショッピングセンターが増えることを示唆している。インプリシットには企業がもたらしている混雑現象が税金による政策で低下されるならば、企業も増加することを示している。

また、住民の税金の変化に対する人口規模の変化は、

$$\frac{\partial p}{\partial t_p} = \frac{2\varepsilon f - \gamma}{2\beta t_f} = \frac{\varepsilon(f - f^*)}{\beta t_f} \quad (17)$$

で表される。(17)式から、 $f < f^*$  の場合は、企業の数にもとづく効用が上昇していく場合で、企業に補助

金(マイナスの税金)を出すことによって、住民当りの税金を上げても人口は増加する。一方  $f^* < f$  の場合

は、効用が下降している段階でも、住民の税金を上げても人口は増加することを示している。

さらに、(9)式および(11)式を(12)式へ代入して整理すると、

$$\frac{2\beta\left(\frac{\alpha}{2\beta} - p\right)}{2\varepsilon\left(\frac{\gamma}{2\varepsilon} - f\right)} = \frac{\beta(p^* - p)}{\varepsilon(f^* - f)} = \frac{t_p}{t_f} \quad (18)$$

が導かれる。(18)式から、

$$\frac{(p^* - p)}{(f^* - f)} = \frac{\varepsilon t_p}{\beta t_f} = \frac{\varepsilon / t_f}{\beta / t_p} \quad (19)$$

が成立する。(19)式から、都市の効用が上昇段階で、人口規模が最適人口規模に近づいて行くことと、企

業数が増加して最適企業数に近づいていく段階においては、外部不経済効果を税金で支出した政策で減少させる必要がある。人口規模または企業規模のどちらかが、最適規模を超えると課税による税収ではなく、補助金を課すことになることを示唆している。

(19)式から、住み難さを減らすことによって最適人口に近づけている都市は活性化された都市が多く、この例として企業よりも住宅が集中している都市であることを示しており、活力のある都市は愛知県の長久手市および日進市などがあげられる<sup>3)</sup>。

実証分析を試みるに際し、つぎの2つのケースが考えられる。

ケース1：長期にわたり「住民当りの税金」対「企業当りの税金」が一定としたケース

(13)式から、人口規模と企業規模との関係は、

$$p = a + bf \quad (20)$$

によって推計される。ただし、 $a = \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\gamma t_p}{2\beta t_f}$  および  $b = \frac{\varepsilon t_p}{\beta t_f}$  である。

ちなみに、 $b$  は税金で企業および住民の不経済効果を打ち消す比を示している。これについては、 $b$  が相対的に高い場合は企業よりも住宅に対して公共サービスが高いことを示しており、 $b$  が相対的に低い場合はその逆である。

ケース2：「住民当りの税金」対「企業当りの税金」が変化するケース

(13)式から、人口規模、「住民当りの税金」対「企業当りの税金」および企業規模との関係については、

$$p = e - hT + kTf \quad (21)$$

によって推計される。ただし、 $e = \frac{\alpha}{2\beta}$ 、 $h = \frac{\gamma}{2\beta}$ 、 $k = \frac{\varepsilon}{\beta}$  および  $T = \frac{t_p}{t_f}$  である。

ちなみに、 $e$  は最適人口規模を示している。

ところで、大企業が中心地に集積しており、そこから均等な人口密度を考慮すると、

$$e = D\pi r^2 = \frac{\alpha}{2\beta} \quad (22)$$

から、空間規模の半径は、

$$r = \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta D\pi}} = \sqrt{\frac{e}{D\pi}} \quad (23)$$

である。ただし、 $D$  は人口密度、 $r$  は公共サービスによって集積した大企業の雇用圏をそれぞれ示す。ただし、例えばショッピングセンターの立地が人口を増やしたのか、人口が増えたからショッピングセンターができたのかは分からない。

### 3. 実証分析

ここでは、ケース(1)について推計を行う。

<sup>3)</sup> これについては、週刊ダイヤモンド別冊「伸びる街&地域活カランキング」2018年、1月14日号、p.49を参照せよ。

全国の市区町村を財政力指数 41.0 以上のグループと 1.0 未満のグループの 2 グループに分けて{20}式を応用すると以下の回帰式のとおりとなる。

・財政力指数 1.0 以上のグループ 80 自治体 決定係数.670

$$p = \frac{19,831.924}{(1.367)} + \frac{20.753f}{(12.560)} \quad ( )内はt値$$

・財政力指数 1.0 以上のグループ 1,660 自治体 決定係数.891

$$p = \frac{9,311.692}{(5.782)} + \frac{19.652f}{(116.504)} \quad ( )内はt値$$

※ 人口は平成 27 年国勢調査、企業数は平成 28 年経済センサスー活動調査を使用

$b$  の値は、財政力指数の高いグループで、高くなっている。このことは、企業よりも住宅に対して公共サービスが高いことを示している。しかしながら、財政力があるため、住民に対し高い公共サービスをする余裕があるという見方もできる。

#### 4. おわりに

ここでは、人口規模および企業規模において 2 乗以外の指数を用いて分析することも可能であったが、2 乗することによって、偶数乗でも構わないが、人口が多くても少なくても外部不経済が存在することを示したかったからである。まず単純化したモデルのもとでの自治体の政策について触れることを試みた。

付録

ここでは、人口が外部不経済効果を急増させるケースを考えよう。

$$u = \alpha p - \beta p^u + \gamma f - \varepsilon f^w \quad (24)$$

ただし、 $0 < u$ 、 $0 < w$ である。

税収のもとで、都市の効用の最大化を考えると、その最大化の条件は、

$$\frac{\alpha - u\beta p^{u-1}}{\gamma - w\varepsilon f^{w-1}} = T \quad (25)$$

である。ただし、 $T = \frac{t_p}{t_f}$ である。

これより、

$$p = \left( \frac{\alpha - T(\gamma - w\varepsilon f^{w-1})}{u\beta} \right)^{\frac{1}{u-1}} \quad (26)$$

ここで、企業数が人口規模に与える条件は、

$$\frac{dp}{df} = \frac{1}{u-1} X^{\frac{2-u}{u-1}} w(w-1) \frac{\varepsilon T f^{w-2}}{u\beta} \quad (27)$$

<sup>4</sup> 財政力指数は、基準財政収入額を基準財政需要額で除して得た数値の過去 3 年間の平均値。ここでは、総務省平成 29 年度 地方財政状況調査の数値を使用した。

で表される。ただし、 $X = \frac{\alpha - \gamma T}{u\beta} + \frac{w\varepsilon T f^{w-1}}{u\beta}$

企業が誘致されれば人口が増えるケースを考えると、上式から、常に $0 < X$ の場合は

$0 < \alpha - \gamma T$  を必要として、 $T < \frac{\alpha}{\gamma}$  であることから、すなわち  $\frac{t_p}{t_f} < \frac{\alpha}{\gamma}$  が成立する。これは、「居住に対

する外部経済効果」対「企業に対する外部経済効果」の比が「住民当たりの税金」対「企業当たりの税金」の比を上回ることを示唆している。

企業が増えれば、人口が増加する場合の条件は、

(1)  $1 < u$  かつ  $1 < w$  であれば、 $0 < \frac{dp}{df}$  である。

人口や企業が増えると一気に外部不経済が増える都市である。

(2)  $0 < u < 1$  かつ  $0 < w < 1$  であれば、 $0 < \frac{dp}{df}$  である。

人口や企業が増えてもそれほど外部不経済が増えない都市である。  
がある。

一方、企業が増えれば人口が減少する場合の条件は、

(3)  $1 < u$  かつ  $0 < w < 1$  であれば、 $\frac{dp}{df} < 0$  である。

人口が増えると外部不経済は急激に増えるが、企業が増えてもそれほど外部不経済が増えない都市

(4)  $0 < u < 1$  かつ  $1 < w$  であれば、 $\frac{dp}{df} < 0$  である。

人口が増えると外部不経済はそれほど増えないが、企業が増えると外部不経済が急激に増える都市である。

上記を整理すると、企業よりも住民に対して税金の政策効果以上に外部経済効果の高い都市においては、(2)のケースおよび(4)のケースが現実的であると思われる。

さらに、上式を最適規模および最適数で表すと、

$$p = \left( p^* - \frac{\varepsilon/t_f}{\beta/t_p} \frac{w}{u} (f^* - f^{w-1}) \right)^{\frac{1}{u-1}} \quad (28)$$

である。この式から、企業からの税金をかなり増やす(または課税する)ことによって、

$\frac{\varepsilon/t_f}{\beta/t_p} \rightarrow 0$  になる。また、これについては企業からの税金によって企業への政策を施すことによって、企

業数は最適数に近づくことにより  $f^* \approx f^{b-1}$  となる。その結果、人口の最適規模は、 $p^* \approx p^{a-1}$  で表さる。

これが達成されるのは  $u = 2$  のときである。

人口と相対的課税との関係を分析するために、(26)式をテーラー展開すると、



$$p = \frac{\alpha}{u\beta} - \frac{1}{u-1} \frac{\gamma - w\epsilon f^{w-1}}{u\beta} \left( \frac{\alpha}{u\beta} \right)^{\frac{2-u}{u-1}} T \quad (29)$$

が導かれる。これについては、

$$p = A - BT \quad (30)$$

を推計することになる。

$$\text{ただし、} A = \frac{\alpha}{u\beta} \text{ および } B = \frac{1}{u-1} \frac{\gamma - w\epsilon f^{w-1}}{u\beta} \left( \frac{\alpha}{u\beta} \right)^{\frac{2-u}{u-1}}$$

上式を推計すると、(26)式において十分条件として  $\gamma - w\epsilon f^{w-1} < 0$  であることから、

$1 < u$  であれば、(30)式の傾き  $B$  は正である。

これについては、人口の増加が強い外部不経済をもたらす場合、増収を増やすために人口(実際には家計)に課税する必要があることを示唆している。

$0 < u < 1$  であれば、(30)式の傾き  $B$  は負である。

これについては、人口の増加がそれほど外部不経済をもたらさない場合、企業に課税するか、人口促進のために補助金をだすことを示唆している。

#### 参考文献

Atkinson, A. B. and J. E. Stiglitz (1980) *Lectures on Public Economics*, New York: McGraw-Hills.

Stiglitz, J. E. (1977) 'The Theory of Local Public Goods', in *The Economics of Public Services*, edited by A. J. Feldstein and R. P. Inman, The Macmillan Press.

Stiglitz, J. E. (2000) *Economics of the Public Sectors*, Third Edition, W. W. Norton & Company (邦訳— 藪内史郎『公共経済学(上)(下)』東洋経済新報社、2003年、2004年)

Rubinfeld, D. L. (1987) 'The Economics of the Local Public Sector', in *Handbook of Public Economics*, vol. II, edited by A. J. Auerbach and M. S. Feldstein, North-Holland.

宇沢弘文・小川善弘「地方公共財理論における Atkinson-Stiglitz のパラドックスについて」『経済論集』54,4:pp.2-10、1989年

神頭広好「観光都市の規模と性格—地方公共財の理論に基づいて—」『日本観光学会誌』第47号、2006年  
坂下 昇「第7章 地方公共財の地域間最適配分」(宇沢弘文・茂木愛一郎編『社会的共通資本—コモンズと都市』東京大学出版会、1994年)