ヘンリー・ジョージ定理と人口移動

関西学院大学
河野正道

1. 序論

この論文の目的は、農村から都市への人口移動を考えた動学的モデルにおいて都市化の最適動学経路を求め、その最適経路が満たすべき性質、とりわけ Henry George 定理がその動学プロセスのなかで各期毎に成立しているか否かを検討することである。

Henry George 定理（以下、HG 定理とよぶ）は最適な公共財供給に関する定理であり、静学的な枠組みで論じられてきた。その定理は、同質的な都市が多数あるときに、地代のすべてを課税しその税収を公共財の支出に充てるときに、それぞれの都市の最適人口が達成される、ということを示す定理である。この定理を最初に動学の中で検討したのはこの定理を動学的枠組みの中で検討したのは Fu(2005)が最初である。彼は一般的な効用関数を用いて、HG 定理は、地代の割引現在価値と公共財のための税収の割引現在価値の間で成立するのであり、各期毎には成立しないことを示している。

Kawano(2003)は対数線形の効用関数を仮定して、動学的な最適人口配分、および、その背後で決まる最適な都市の数の時間経路を導出した。そこでは、すべての人口が都市に住み、公共財の蓄積が進むにつれて都市の規模、および、都市の数がどのように変化していくかを検討した。そこで示されたものは、まず第一に、各期毎に HG 定理が成立しているということである。それは、効用関数が加法分離型であるとの仮定に起因する。各世代の効用の和を厚生関数としてこれを政府は最大化するのであるが、そのときは、定常状態での最大化のように、各期毎の最大化が等しくなるのである。第二に、最適な都市人口の時間とともに減少するということ、最適な都市の数は、全体の人口が一定であると仮定されているので、増加することが導出された。

今回の論文では、それとは異なりすべての人口が都市部に住むのではなく、最初はすべて農村に住んでおり、そこからより高い効用が獲得できる都市部へ移動するという人口移動を含んだ動学的最適モデルである。

結論として導出されたものは、先に Kawano(2013)で得られた結論とは定性的にはことならず、最適経路上では、都市の数は減少し、一つの都市の人口は上昇し、その都市内での公共財は単調に増加するということである。

2. モデル

農村に大きな人口が存在し、そこから都

市への人口移動を考える。この論文においては、都市と農村の違いは、基本的には公共財の有無である。都市には公共財があるが、農村にはないとする。農村には２世代が重複して存在すると仮定する。人は若年期と老年期の 2 期生きる。それぞれの期に農村では$\overline{u_a}/2$の効用を得、生涯では$\overline{u_a}$の効用を得る。１期において、老人を 0 世代人と呼ぶ。[1] 0 世代人が都市に移動することによって、$\overline{u_a}/2$以上の効用が得られるときに移動する。よって 1 期の人口移動の均衡においては、老人の都市に住む効用は$\overline{u_a}/2$となる。彼らは労働者として移動するのではなく、地主として移動するのである。老人は若者に比べて多少なりとも資産を持っている。この小さな資産を用いて政府から 1 期に都市の土地を購入する。この最初の土地は極めて価格が安く、無視しうるほどであるとする。一方、農村の若者は労働者として移動する。彼らは農村に留まれば、若年期と老年期合計の効用$\overline{u_a}$を得る。よって、都市で得られる効用がこれを超えれば移動する。よって、均衡では都市における１世代人の生涯効用は$\overline{u_a}$となる。

なお、若年期に都市に住んだ人は老年期に農村に移住することは不可能であると仮定する。また、2 期以降に農村の老年期の人が都市の地主となることも不可能である。これは、2 期以降は都市に住民が居住し、彼らは土地を購入するために十分な貯蓄を持っているが、農村に住む人は十分な蓄積がないからである。

都市の生産要素は土地と労働である。土地は面積が一定である。よって、生産関数は労働のみの関数として与えられ、1 期の生産量は

$$Y_1 = \sqrt{N_1} \tag{1}$$

である。ここでN_1は 1 期の若者である労働者の数である。以下、すべての変数に関して下付添え字は期を示すものとする。

次に、まず、1 期の労働者である 1 世代人[2]の若者の最適化行動を分析する。彼の賃金w_1は限界生産力説より

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{N_1}} \tag{2}$$

である。その予算制約式は

$$w_1 = c_1^1 + \frac{c_2^2}{1+r_2} \tag{3}$$

となる。ここでc_1^1は若年期の消費であり、c_2^2は老年期の消費である。r_2は 2 期の利子率である。G_2を 2 期の公共財とし、1 世代人は 2 期にのみ公共財を消費すると仮定する[3]と、彼の効用関数は,

$$\begin{aligned} U_1 &= U\left(c_1^1, c_2^2, G_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(c_1^1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(c_2^2\right) + 2\ln\left(1+G_2\right) \end{aligned} \tag{4}$$

で表現され、第 1 世代人は予算制約式(3)に基づいて(4)を最大化する。よって、1 期、２期の消費c_1^1, c_2^2は

[1]彼らは 0 期に生まれたからである。

[2] 1 期の期首に生まれた者を 1 世代人と呼ぶ。以下同様に、t 期首に生まれた者を t 世代人と呼ぶ。

[3] 公共財は若年期も老年期も消費するとしても結論は変わらない。しかし、議論を簡単化するために、老年期のみに消費するものとする。

$$c_1^1 = \frac{w_1}{2}, c_2^2 = \frac{w_1}{2} R_2, \quad (5)$$

となる。ここで $R_2 = 1 + r_2$ である。この貯蓄は、土地を購入することによって行われる。この貯蓄 s_1 は

$$s_1 = w_1 - c_1^1 = \frac{w_1}{2} \qquad (6)$$

である。

貯蓄に対する利子は地代とキャピタルゲインの和である。なお、この貯蓄を用いてどの都市の土地を購入してもよいと仮定する。つまり、自分の住む都市以外の都市の土地を購入してもよいとする。ここで考える社会の都市は、すべて同質であるとする。1 期には都市の数は 1 と仮定されたが、2 期以降は新しい都市が生まれる可能性は排除していないのであり、最初の都市の労働者の貯蓄は新しい都市の土地の購入に向かうこともある[4]。

よって、社会全体として均一な利子率が成立する。土地の購入の資金は貯蓄であるから、これは社会全体として $\frac{w_1}{2} N_1 n_1$ であり、次期にこの土地を売却するときの売却収入は $\frac{w_2}{2} N_2 n_2$ であり、地代は $\left(\sqrt{N_2}/2 - g_2\right) n_2$ である。ここで n_2 は 2 期の都市の数である。なお、仮定より $n_1 = 1$ であるが表示上の対称性を保つために n_1 と表示する。なお、ここで政府は地代にのみ課税をすると仮定する。よって、利子ファクター $R_2 = 1 + r_2$ は

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\text{total saving}_2 + \text{total land rent}_2}{\text{total saving}_1} \\ &= \frac{\frac{w_2}{2} N_2 n_2 + \left(\frac{\sqrt{N_2}}{2} - g_2 \right) n_2}{\frac{w_1}{2} N_1 n_1} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2} - 4 g_2 w_2 \right) \frac{w_1^2}{w_2^2} \frac{n_2}{n_1}}{\frac{w_1}{2}} \qquad (7) \end{aligned}$$

となる。

1 世代人の最大化の結果、最大化された効用関数は(5),(6),(7)より

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{w_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{w_1}{2} R_2\right) + 2\ln\left(1 + G_2\right) \qquad (8) \\ &= \frac{3}{2} \ln(w_1) - \frac{1}{2} \ln(w_2) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2} - 4 g_2 w_2\right) + 2\ln\left(1 + G_2\right) \end{aligned}$$

となる。

次に、1 期の老人である 0 世代人の最適行動を分析する。彼の粗利潤は、0 世代人合計 $Y_1 - w_1 N_1 = \sqrt{N_1}/2$ であり、彼の税引き後の地代所得は 1 人当たり $\pi_0 = \left(\sqrt{N_1}/2 - g_1\right)/N_0$ となる。彼の 1 期の消費はこの純地代所得と土地を販売した代金の合計であり、その土地の買い手は都市の若者であり、その収入は若者の貯蓄であり(6)で求めている。つまり、純地代所得に土地の売り上げ収入が彼の 1 期の可処分所得である。この可処分所得が 1 期の老人の消費となる。よって、彼の消費 c_1^2 は彼の可処分所得、つまり

$$c_1^2 = \frac{\frac{\sqrt{N_1}}{2} - g_1 + s_1 N_1}{N_0} = \left(\frac{3}{2} - 4 w_1 g_1\right) \frac{w_0^2}{w_1}, \quad (9)$$

となる。よって、1 期の老人の効用は $U_0 = \frac{1}{2} \ln c_1^2 + 2\ln\left(1 + G_1\right)$ であるから、

[4] 新しい土地はもともとは政府の所有物であり、その価格は最初の都市の土地と全く同一である。というのは、ここでは同質的な都市を考えているのであるから。購入代金は政府に入る。1 期末（2 期首と同じ）にすべての土地の販売代金は一度は政府に入る。そして、その販売収入を 1 期の地主にすべて払い出すとする。

$$U_0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4w_1 g_1\right) + \ln w_0 - \frac{1}{2}\ln w_1 + 2\ln(1+G_1) \quad (11)$$

となる。

なお、政府の予算は均衡しているので 1 期の公共財 G_1 は税収 g_1 に等しく

$$G_1 = g_1 \qquad (12)$$

となる。第 2 期の都市の数は n_2 であるとする。2 期の公共財の財源は同じ時期に徴収される税であり、それは $g_2 n_2$ である。また、1 期の公共財は半分が減価償却していると仮定するので、第 2 期の公共財の合計は

$$G_2 n_2 = g_2 n_2 + \frac{G_1 n_1}{2} \qquad (13)$$

となる。

3.政府の問題

政府の目的は各世代人の一人当たり効用を世代に関して合計した厚生関数を、公共財の動学経路(12),(13)を制約条件として最大化することである。その手段は、各都市あたりの人口、および、公共財のための徴収額である。この目的関数を制約条件式の下で最大化するためにラグランジュ関数を作る。(8),(11),(12),(13)より

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\tau=0}^{\infty} U_\tau + \mu_1 (G_1 - g_1) + \sum_{\tau=2}^{\infty} \mu_\tau \left((G_\tau - g_\tau) \frac{n_\tau}{n_{\tau-1}} - \frac{G_{\tau-1}}{2} \right) \\ &= \ln(w_0) - \frac{1}{2}\ln(w_1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_1 w_1\right) + 2\ln(1+G_1) + \mu_1(G_1 - g_1) \\ &+ \frac{3}{2}\ln(w_1) - \frac{1}{2}\ln(w_2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_2 w_2\right) + 2\ln(1+G_2) \\ &+ \mu_2 \left((G_2 - g_2)\frac{n_2}{n_1} - \frac{G_1}{2} \right) + \cdot\cdot\cdot, \end{aligned} \qquad (14)$$

となる。最大化の一階の条件として、$\partial W / \partial w_1 = 0$ より最適な N_1 を求める。その結果、

$$g_1 = \frac{1}{4w_1} \qquad (15)$$

が得られる。この性質が HG 定理であり、これについては節を改めて分析する。

また、(12)および (15)より

$$G_1 = \frac{1}{4w_1} \qquad (16)$$

を得る。0 世代人は効用が農村で老年期に留まった時の効用である $\bar{u}_a / 2$ と等しくなるのが人口移動の均衡条件であるから、$U_0 = \bar{u}_a / 2$,と(11),(15),(16)より

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{4w_1}\right)^2}{\sqrt{w_1}} = \frac{\bar{u}_a \sqrt{2}}{2w_0} \qquad (17)$$

が成立する。つまり、0 世代人の都市の人口 N_0 ,あるいは w_0 で示されるのであるが、は第 1 世代の賃金率 w_1 の関数として決まる。これが(16)である。0 世代人は、この w_1 を完全予見して都市への移住を決定し、その結果、移住する老人の数 N_0 、つまり、その背後で w_0 が決まるのである。

$\partial W / \partial g_1 = 0$ より $\mu_1 = -2w_1 / (3/2 - 4g_1 w_1)$

となる。これに（15）を用いて

$$\mu_1 = -4w_1 \qquad (18)$$

を得る。$\partial W / \partial G_1 = 0$ より

$$\mu_1 + \frac{2}{1+G_1} - \frac{\mu_2}{2} = 0 \qquad (19)$$

となる。これと同様に $\partial W / \partial g_2 = 0$ より

$$\frac{\mu_2 n_2}{n_1} = -4w_2 \qquad (18')$$

を得る。(18)(19)(18')より

$$\frac{w_2}{x_2} = \frac{2w_1(4w_1 - 1)}{4w_1 + 1} \qquad (20)$$

を得る。ここで $x_2 = n_2 / n_1$ であり、表示上の簡単化のためにこれを導入する。つまり、

2 期の賃金率 w_2 、 x_2 は 1 期の賃金率 w_1 の関数として与えられ、定差方程式を得た。さらに 1 期と 2 期を結ぶリンクは(13), (16)より

$$\left(G_2-\frac{1}{4w_2}\right)x_2=\frac{1}{8w_1} \qquad (21)$$

を得る。これも、1 期の変数と 2 期の変数のリンクを示す。さらにまた、人口移動の均衡条件より $U_1=\bar{u}_a$ より

$$\frac{\left(1+G_2\right)^2}{\sqrt{w_2}}=\frac{\sqrt{2}\bar{u}_a}{w_1^{3/2}} \qquad (22)$$

となり、よって、1 期と 2 期の橋渡しは(20),(21),(22)の 3 式で、変数は G, w, x の 3 個である。

次に、2 期から 3 期へのリンクを考える。$\partial W/\partial w_3=0$ より(15)と同様に

$$g_3=\frac{1}{4w_3} \qquad (15')$$

となる。$\partial W/\partial \mu_3=0$ と、(15') より(21)同様に

$$\left(G_3-\frac{1}{4w_3}\right)x_3=\frac{G_2}{2} \qquad (21')$$

となる。$\partial W/\partial G_2=0$ より(19)と同様に

$$\mu_2 x_2+\frac{2}{1+G_2}-\frac{\mu_3}{2}=0 \qquad (19')$$

となり、(18')より $\mu_2 x_2=-4w_2$ をすでに得ている。これと同様に、$\partial W/\partial g_3=0$ より、$\mu_3 x_3=-4w_3$ を得る。よって、これらを(19')に代入して(20)と同様に

$$\frac{w_3}{x_3}=2w_2-\frac{1}{1+G_2} \qquad (20')$$

を得る。また、2 期の人口移動の均衡条件は(22)と同様に

$$\frac{\left(1+G_3\right)^2}{\sqrt{w_3}}=\frac{\bar{u}_a\sqrt{2}}{w_2^{3/2}} \qquad (22')$$

となる。よって、2 期と 3 期をリンクする方程式は(21'),(20'),(22')となる。$t\geq 3$ についてもこれと同様である。

5.シミュレーション

$\bar{u}_a=\sqrt{2}$ とおくと、定常状態を $\left(G^*, w^*, x^*\right)$ $=\left(1,1/2,1\right)$ と簡単にすることができる。コンピュータで定常均衡に到達するまでの最適経路を計算すると表 1 のようになる。初期値 w_0 は 0.4630 でなければならないことがわかった。

表 1 最適経路(小数点以下 3 桁以下切捨)

期	G	w	x
0	—	0.463	—
1	0.350	0.713	—
2	0.608	0.607	0.886
3	0.774	0.556	0.936
4	0.872	0.53	0.964
5	0.929	0.516	0.980
6	0.960	0.508	0.989
7	0.978	0.504	0.994
8	0.988	0.502	0.996
9	0.993	0.501	0.998
10	0.996	0.500	0.999
11	0.998	0.500	0.999
12	0.998	0.500	0.999

この表よりわかることは、①賃金率は[5]単調

[5] 0 期の賃金率は真実の賃金率ではない。1 期以降の賃金率は定常均衡に到達するまで単調に増加している。

に増加している。つまり、一つの都市の人口は単調に増加している。また、②xは 1 以下であるから、都市の数は常に減少している。③公共財は単調に増加している。また、④税収は賃金率と逆比例の関係があるので、単調に増加している。これは、農村から都市への人口移動を考えなかった Kawano[10]と同じ結果である。

6. Henry George 定理の検討

(15)で示されたように$g_1 = 1/4w_1$となる。ここで一つの都市の地代総額は生産関数が(1)で示されているので

$$\frac{\sqrt{N}}{2} = \frac{1}{4w} = \mathrm{g} \qquad (25)$$

である。つまり、税収g_1がこの地代総額に等しいことを示している。これが HG 定理であり、HG 定理は、各期毎に成立することが分かる。どのような条件の下で各期ごとの HG 定理が成立するのかを検討してみよう。

このモデルの効用関数は Log-Linear となる。加法分離型なのである。よって、

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{\tau=0}^{\infty} U_\tau + \mu_1 (G_1 - g_1) + \sum_{\tau=2}^{\infty} \mu_\tau \left((G_\tau - g_\tau) \frac{n_\tau}{n_{\tau-1}} - \frac{G_{\tau-1}}{2} \right) \\
&= \ln(w_0) - \frac{1}{2}\ln(w_1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_1 w_1\right) + 2\ln(1+G_1) \\
&+ \mu_1 (G_1 - g_1) \\
&+ \frac{3}{2}\ln(w_1) - \frac{1}{2}\ln(w_2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_2 w_2\right) + 2\ln(1+G_2) \\
&+ \mu_2 \left((G_2 - g_2)\frac{n_2}{n_1} - \frac{G_1}{2} \right) \\
&+ \frac{3}{2}\ln(w_2) - \frac{1}{2}\ln(w_3) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_3 w_3\right) + 2\ln(1+G_3) \\
&+ \mu_3 \left((G_3 - g_3)\frac{n_3}{n_2} - \frac{G_2}{2} \right) \\
&+ \cdots,
\end{aligned}$$

となり、w_tで最適化すると、

$$\frac{\partial W}{\partial w_t} = \frac{\partial}{\partial w_t}\left(\frac{3}{2}\ln(w_t) - \frac{1}{2}\ln(w_t) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_t w_t\right) \right) = 0$$

が成立し、これは、定常状態の効用

$$V_t = \frac{3}{2}\ln(w_t) - \frac{1}{2}\ln(w_t) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2} - 4g_t w_t\right) + 2\ln(1+G_t)$$

を最大化するのと同じことになる。よって、静学の最大化問題と同じことになり、したがって、各期毎に HG 定理が成立するのである。

参考文献

[1] Fu, S., *Essays on Urban Agglomeration Economies*, Ph.D dissertation, Boston College, 2005, 3181594.

[2] Kawano,M., “Optimal Process of Urbanization in a Developing Country-Dynamic Henry George Theorem,” Letters in Spatial and Resource Sciences DOI 10.1007/s12076-013-0111-x Published online 2013.